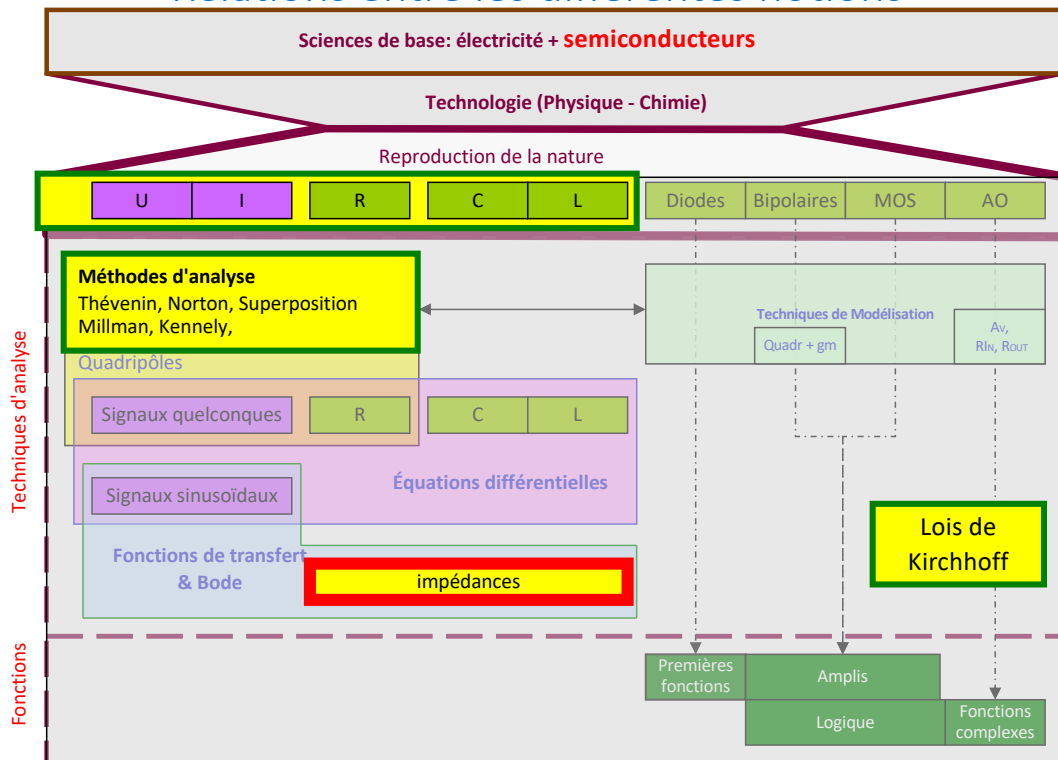


# Relations entre les différentes notions



1

Le cours sur la modélisation de dipôles et quadripôles est un passage délicat car abstrait à ce stade de la formation. Nous allons revenir à une approche plus classique exploitant l'outil mathématique.

Le cours va nous permettre de prédire le comportement de circuits composés de résistances et de condensateurs. Les deux types de signaux les plus utilisés pour caractériser ces circuits sont les signaux sinusoïdaux et carrés utilisés respectivement en analogique et en numérique. Le cours d'aujourd'hui exploite les **expressions complexes** pour décrire le comportement de ces circuits. Cette notation évitera deux difficultés majeures:

- De décrire le comportement du circuit à partir d'équations différentielles
- de manipuler des expressions véhiculant, lorsqu'il s'agit de *sinus*, à la fois des amplitudes et des phases, ce qui s'avère complexe lors de la comparaison entre deux signaux (entrée et sortie)

## Analyses avec circuits RC

- Méthodes précédentes utilisables avec capacités et inductances???
  - Rappels : Capacité et inductance
  - Analyses de circuit avec un seul type de composant : Facile !!!
  - Analyses de circuit avec une combinaison de composants : Plus délicat !!!
- Analyse **temporelle** pour circuits RC (idem RL, et RLC)
  - Équation différentielle simple pour signaux carrés (semaine 8)
  - Équation différentielle complexe pour signaux sinusoïdaux
- Analyse **fréquentielle** pour circuits RC (idem RL, et RLC)
  - Exploitation des nombres complexes → Rappels essentiels
  - Notion d'impédance complexe
  - Analyse comparable avec études des semaines passées

2

L'analyse de circuits RC de base va s'avérer fondamentale pour l'évaluation des performances et des imperfections des circuits futurs. Nous verrons dans le futur, que cette combinaison sera volontairement introduite ou le résultat de la présence d'éléments parasites avec un effet préjudiciable.

Les techniques d'analyse ne sont pas toujours intuitives, et exploitent selon les configurations RC des concepts mathématiques différents :

- Valeurs complexes lorsque nous travaillerons avec des signaux *sinusoïdaux*
- Equations différentielles pour les sauts indiciels

Dans le cas du *sinus*, nous verrons que les techniques présentées dans les cours précédents peuvent cependant être exploitées.

## Rappels composants R, C, L

### 1) Circuit avec résistances uniquement

$$U = R.I$$

- Composants série, parallèles faciles à fusionner
- Transformation étoiles  $\leftrightarrow$  triangles s'appliquent facilement

### 2) Circuit avec condensateurs uniquement

$$i(t) = \frac{dq}{dt} \quad (a) = \frac{Cdu}{dt} \quad (b)$$

- Composants série, parallèles faciles à fusionner
- Transformation étoiles  $\leftrightarrow$  triangles s'appliquent aussi

### 3) Circuit avec inductances uniquement

$$u(t) = \frac{Ldi}{dt}$$

- Composants série, parallèles faciles à fusionner
- Transformation étoiles  $\leftrightarrow$  triangles s'appliquent aussi

### 4) Combinaisons : on se limitera aux combinaisons **R et C**

- Plus délicat car on travaille sur des **équations différentielles**

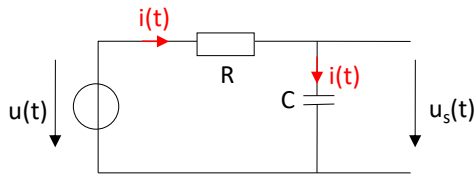
Facile

3

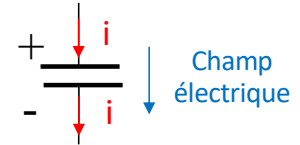
Le degré de complexité n'est pas le même selon que l'on analyse :

- des résistances uniquement. Les équations sont linéaires et basées sur la loi d'Ohm.
- des condensateurs uniquement. En exploitant la notion de charge ( $Q=CV$ ), il est cependant possible de décrire un système linéaire.
- Une combinaison de résistances et de condensateurs. Cette combinaison est complexe, car elle met en évidence des équations différentielles (pour des circuits simples avec un seul condensateur: équations du premier ordre).
- Nous aurions la même complexité avec une combinaison RL, et des équations différentielles du second ordre avec une combinaison RLC. Dans le cadre de ce cours, nous n'étudierons que les combinaisons RC.

## Circuit de base et analyse temporelle



On extrait des électrons



On injecte des électrons

$$i(t) = \frac{u(t) - u_s(t)}{R} = C \frac{du_s}{dt} \quad \text{ou encore} \quad u(t) = u_s(t) + RC \frac{du_s}{dt}$$

C'est une équation différentielle du premier ordre :

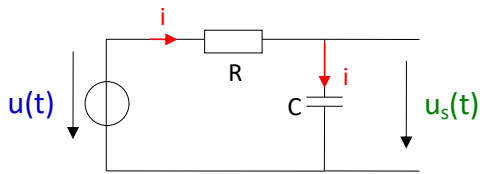
- Avec des *sin* l'analyse exploitera une méthode plus simple avec les « complexes »
- Analyse temporelle substituée par une **analyse fréquentielle**

4

Nous proposons le circuit RC de base, pour mettre en évidence, sans la résoudre, la nature de l'équation qui régit le comportement du système.

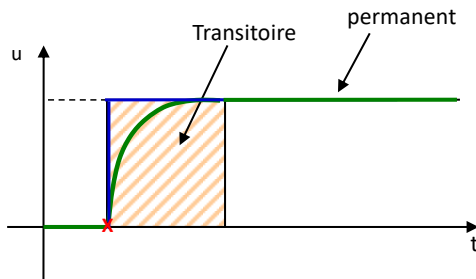
En posant l'égalité du courant circulant dans la boucle (loi de Kirchhoff), on montre que celui-ci s'exprime linéairement en fonction de la différence de potentiel  $[u(t) - u_s(t)]$  autour de R, mais à partir de la variation de la tension autour de C. L'équation globale est donc de nature différentielle.

## Exemples de signaux [1]

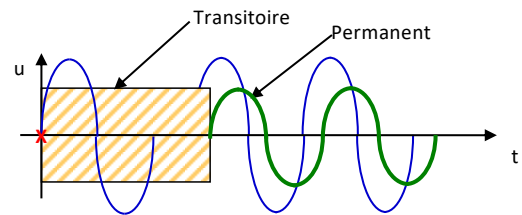


L'équation différentielle est posée de la même façon pour les deux cas, seule l'excitation change

**Saut indiciel :**  
exemple de variations brutales d'une horloge



**Signal sinusoïdal :**



Dans les deux cas, nous supposons la **capacité déchargée** au départ ( $u_s(0) = 0$ )

Au bout d'un « certain » temps, la sortie atteint son régime permanent

5

Cette équation différentielle sera exploitée pour analyser le comportement du circuit soumis à un signal de type saut indiciel (ex : front montant ou descendant d'une horloge).

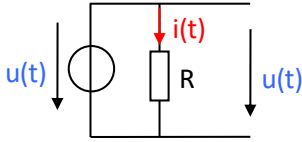
Nous mettrons en évidence la décomposition de la réponse  $u_s(t)$  en un phénomène transitoire et un phénomène permanent.

Pour un signal sinusoïdal, le circuit présente lui aussi une superposition de deux phénomènes transitoire et permanent.

Cependant, l'intérêt de l'étude pour un signal sinusoïdal se limite au permanent, le démarrage n'ayant que peu d'intérêt.

Nous verrons comment l'étude du permanent peut exploiter un autre outil mathématique qui nous permettra de nous affranchir de la résolution d'une équation différentielle. Une petite parenthèse nombres complexes est cependant nécessaire.

## Avec résistance, pas de déphasage entre u et i pour un *sin*



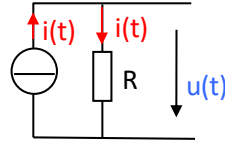
$$u(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t)$$

$$\mathbf{i}(t) = \frac{\mathbf{u}(t)}{\mathbf{R}} = \frac{U_0 \cdot \sin(\omega t)}{R}$$

$$i(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t)$$

$$\text{Avec } I_0 = \frac{U_0}{R}$$

$\sin(\omega t)$  pour u et i qui sont en phase



$$i(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{i}(t) = R \cdot I_0 \cdot \sin(\omega t)$$

$$u(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t)$$

$$\text{Avec } U_0 = R \cdot I_0$$

À nouveau  $\sin(\omega t)$  pour u et i qui sont en phase

Remarque:

- $I_0$  et  $U_0$  sont des amplitudes
- Parfois on les note  $\widehat{I}_0$  et  $\widehat{U}_0$
- On utilise aussi très souvent la valeur efficace notée I ou  $I_{\text{EFF}}$  et U ou  $U_{\text{EFF}}$  qui sera exploitée dans le calcul des puissances

Conséquence:

- $i(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t) = I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t)$
- $u(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t) = U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t)$

Conclusion : Avec R, **courant** et **tension** sont en phase

6

L'utilisation des nombres complexes sera justifiée plus loin lorsque l'on comparera le comportement d'un condensateur avec celui d'une résistance, pour un signal de type sinusoïdal (qu'il soit contrôlé en tension ou en courant).

Pour commencer, prenons le cas d'une source de tension sinusoïdale appliquée aux bornes de R. Dans le schéma de gauche, avec une source de tension, nous retrouvons exactement la même tension aux bornes de la résistance et avec la loi d'ohm, nous pouvons facilement déduire la courant  $i(t)$  qui la traverse. Nous voyons que courant et tension sont en phase. Les deux expressions dépendent de  $\sin(\omega t)$ .

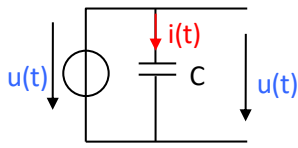
Nous aurions la même observation si on utilisait une source de courant. Il n'y a qu'une seule maille et le courant de la source traverse intégralement la résistance. La loi d'ohm permet cette fois de calculer la tension aux bornes de la résistance. Là encore, nous voyons que courant et tension sont en phase.

Dans le cas du condensateur, nous allons voir dans la diapositive suivante que les observations seront différentes.

**Petite remarque:** Il y a parfois une confusion entre la notation réservée pour l'amplitude et celle de la valeur efficace. Les notations  $\widehat{I}_0$  et  $\widehat{U}_0$  pour l'amplitude (respectivement courant et tension),  $I_{\text{EFF}}$  et  $U_{\text{EFF}}$  pour la valeur efficace lèveraient toute ambiguïté. Cependant, couramment utilisées, les notations I et U sont plus ambiguës bien qu'elles soient souvent utilisées pour les valeurs efficaces.

Si ces dernières sont issues d'expressions  $I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t)$  et  $U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t)$ , le doute n'est plus permis!!!!

## Avec condensateur, déphasage entre u et i pour un *sin*

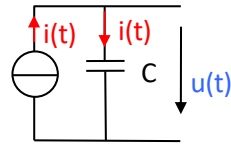


$$u(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t)$$

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} = C\omega U_0 \cdot \cos(\omega t)$$

$$i(t) = C\omega U_0 \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Entre u et i, il y a un déphasage de  $+\frac{\pi}{2}$ ,  
i(t) qui est en avance sur u(t)



Un peu plus complexe avec i(t)

$$i(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t) \text{ or } i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

$$\text{On cherche } u(t) \Rightarrow du = \frac{i(t) \cdot dt}{C}$$

$$\text{finalement } \int du = u(t) = \int \frac{i(t) \cdot dt}{C} = \int \frac{I_0 \cdot \sin(\omega t) \cdot dt}{C}$$

*constantes* (pointing to I<sub>0</sub> and C)

$$u(t) = \frac{-I_0 \cos(\omega t)}{\omega C} = \frac{-I_0 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})}{\omega C} = \frac{I_0 \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})}{\omega C}$$

Le même déphasage de  $+\frac{\pi}{2}$

Conclusion : Déphasage constant de  $\frac{\pi}{2}$  entre **courant** et **tension**

7

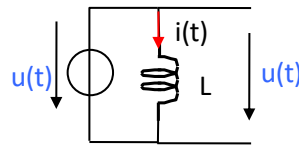
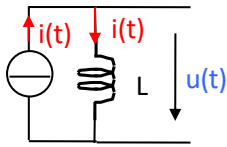
La loi fondamentale du condensateur met en évidence:

- un calcul de dérivée: pour calculer le courant qui charge le condensateur avec une tension appliquée à ses bornes connue.
- Un calcul d'intégrale: pour calculer la tension aux bornes du condensateur si on connaît le courant qui le charge.

Dans les deux cas, les calculs mettent en évidence un déphasage de  $\pi/2$  entre i(t) et u(t).

A noter que, quelque soit le temps t, ce **déphasage est constant**.

## Avec inductance, déphasage entre u et i pour un *sin*



plus complexe avec u(t)

$$i(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t)$$

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L\omega I_0 \cdot \cos(\omega t)$$

$$u(t) = L\omega I_0 \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Entre u et i, il y a un déphasage de  $+\frac{\pi}{2}$  et cette fois c'est u(t) qui est en avance sur i(t)

$$u(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t), \text{ or } u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \Rightarrow di = \frac{u(t) \cdot dt}{L}$$

$$\text{finalement } \int di = i(t) = \int \frac{u(t) \cdot dt}{L} = \int \frac{U_0 \cdot \sin(\omega t) \cdot dt}{L}$$

$$i(t) = \frac{-U_0 \cos(\omega t)}{\omega L} = \frac{-U_0 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})}{\omega L} = \frac{U_0 \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})}{\omega L}$$

On a encore un déphasage entre u et i de  $+\frac{\pi}{2}$  en faveur de u(t)

Conclusion : Déphasage constant de  $\frac{\pi}{2}$  entre **courant** et **tension**

8

Les explications pour l'inductance sont similaires. Cette fois, on a un calcul de dérivée si le courant est fixé, ou un calcul d'une intégrale si c'est la tension qui est fixée.

On retrouve un déphasage constant de  $\pi/2$  avec cette fois u(t) qui est en avance.

## Commentaires

### Constat:

- Avec le condensateur on observe un déphasage constant de  $\pi/2$  entre  $i(t)$  et  $u_s(t)$  :  $i(t)$  est en avance
- Avec l'inductance on observe un déphasage constant de  $\pi/2$  entre  $i(t)$  et  $u_s(t)$  :  $u(t)$  est en avance

Tension aux bornes de R de la forme:

$$U = R \cdot I$$

Tension aux bornes de C :  $u(t) = \frac{I_0 \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})}{\omega C}$  de la forme  $U = \frac{1}{\omega C} \cdot I_2$  ( $I_2$  différent du courant I)

Tension aux bornes de L :  $u(t) = L \omega I_0 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$  de la forme  $U = \omega \cdot L \cdot I_2$  ( $I_2$  différent du courant I)

$\frac{1}{\omega C}$  comparable à une résistance qui **diminue** avec la **fréquence**

$\omega \cdot L$  comparable à une résistance qui **augmente** avec la **fréquence**

**Objectif:** Proposer un outil mathématique permettant :

- D'absorber le problème du déphasage :

$$A \sin(\omega t) + B \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = A \sin(\omega t) + X \sin(\omega t) = (A + X) \sin(\omega t)$$

- D'assimiler la capacité (idem inductance) à une résistance **variable** → **Impédance**,
- Reproduire le déphasage en temps utile,
- Représentation aisée quelle que soit la fréquence → **Diagramme de Bode**

9

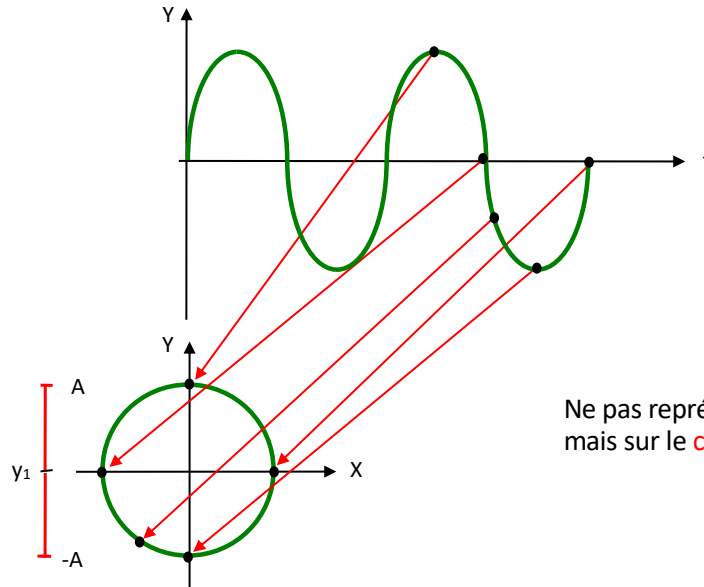
Si on ne tient pas compte du déphasage, on pourrait penser que, pour le condensateur, U dépendrait linéairement de I. La pente R de la résistance serait ici substituée par la pente  $1/\omega C$  du condensateur. Cette pente varie en fonction de la fréquence (pulsation à  $2\pi$  près).

Dans le cas de l'inductance, les mêmes conclusions s'imposent: U dépendrait linéairement de I avec une pente  $\omega L$ . Cette pente varie aussi en fonction de la fréquence (pulsation à  $2\pi$  près).

Malheureusement le déphasage entre  $u(t)$  et  $i(t)$  remet en question nos premières suppositions. Nous verrons cependant, qu'il est possible d'assimiler un condensateur et une inductance à une résistance « variable », ce qui permettra d'exploiter toutes les techniques vues dans les cours précédents. La notion d'impédance (équivalent à une résistance variable avec la fréquence) sera bâtie avec les nombres complexes. Une combinaison d'impédances nous donnera une expression complexe qu'il est possible d'analyser graphiquement grâce à l'utilisation d'une technique de représentation appelée **diagramme de Bode**.

## Mode de représentation du sin avec cercle trigonométrique

Fonction de base:  $y(t) = A \cdot \sin(\omega t)$



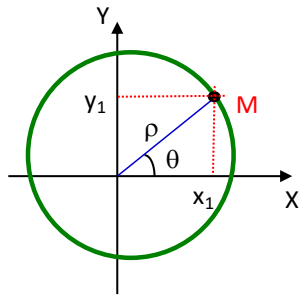
Ne pas représenter le signal sur l'axe des Y mais sur le **cercle trigonométrique**.

10

Quel que soit le nombre de périodes, le profil d'une sinusoïde se répète tous les  $2\pi$  et ne change pas. Le premier principe consiste à représenter l'évolution du sinus sur le cercle trigonométrique.

Le cercle trigonométrique est simple à observer et à exploiter. La position du point sur le cercle dépend de la rotation obtenue au bout d'un temps et qui vaut  $\omega t$ . Au bout d'une période complète,  $\omega t = 2k\pi$  et on repasse par le point d'origine sur l'axe horizontal.

## Étude du cercle trigonométrique



Comment définir un point M sur le cercle ??  
Plusieurs écritures:

- Coordonnées polaires :  $M = \rho e^{i\theta}$  avec  $\omega t = \theta$  et  $A = \rho$
- Projection de M sur l'axe des X et l'axe des Y

$$\text{Projection sur Y:} \quad y_1 = \rho \cdot \sin(\omega t) = \rho \cdot \sin(\theta)$$

$$\text{Projection sur X:} \quad x_1 = \rho \cdot \cos(\omega t) = \rho \cdot \cos(\theta)$$

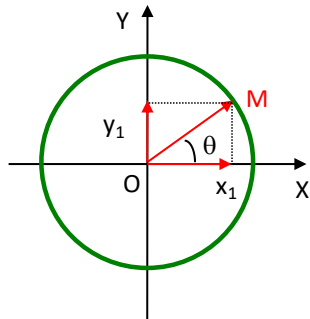
11

Tout point M sur le cercle trigonométrique peut être représenté par le rayon du cercle et l'angle que ce point forme avec le centre et l'axe des X.

Le même point M se projette sur l'axe des x et des y et les projections peuvent s'exprimer sous la forme :

- $A \sin \omega t = \rho \cdot \sin(\theta)$  pour la projection sur l'axe des y
- $A \cos \omega t = \rho \cdot \cos(\theta)$  pour la projection sur l'axe des x

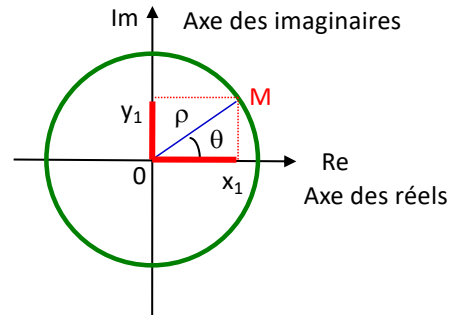
## Autres représentations



Analyse avec des vecteurs :  
*Source d'inspiration pour  
représentation de Fresnel*

$$\vec{OM} = \vec{Ox_1} + \vec{Oy_1}$$

$$\theta = \omega t$$



On introduit une nouvelle représentation:  
*Le plan complexe*

$M = x_1 + i.y_1$  pour les mathématiciens

$M = x_1 + j.y_1$  pour les physiciens

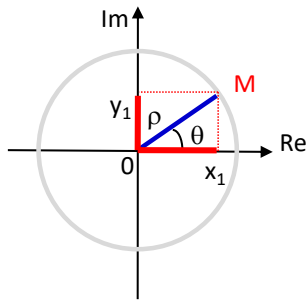
i et j précisent qu'il s'agit de l'axe des imaginaires

12

Si l'on assimile ces projections à des vecteurs (représentation de Fresnel), alors le vecteur  $\vec{OM}$  peut s'exprimer comme la somme des deux vecteurs  $\vec{Ox_1}$  et  $\vec{Oy_1}$  obtenus par la projection de M sur les deux axes.

En mathématiques, l'utilisation du plan complexe permet d'exploiter le même concept de représentation vectorielle avec une petite nuance dans la notation (usage de **i** ou **j** pour spécifier l'axe utilisé).

## Intérêt de ces représentations



Nous pourrions nous affranchir d'utiliser des  $\sin(\omega t)$   
 À tout moment, nous pouvons retrouver :  $y_1 = \rho \cdot \sin(\theta)$  et  $x_1 = \rho \cdot \cos(\theta)$

car M (ou  $\overrightarrow{OM}$ ) véhicule **deux informations**:

- 1) Sa « longueur » appelée **module** d'après Pythagore

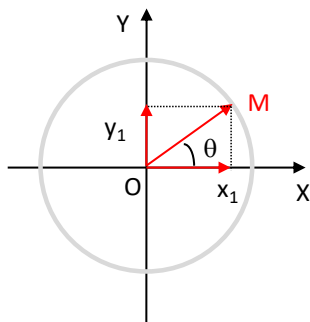
$$\|\overrightarrow{OM}\|^2 = \|\overrightarrow{Ox_1}\|^2 + \|\overrightarrow{Oy_1}\|^2$$

pour simplifier  $\rho^2 = x_1^2 + y_1^2$  soit  $\rho = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

- 2) Son déphasage par rapport à l'axe des X (réels) appelé **argument**

$$\sin(\theta) = \frac{y_1}{\rho} = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \quad \cos(\theta) = \frac{x_1}{\rho} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

$$\text{tg}(\theta) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{\text{Im}}{\text{Re}} \quad \theta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}}\right) = \text{arctg}\left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}}\right) \quad \text{Pas tout à fait}$$



13

Nous n'allons pas exploiter le diagramme de Fresnel dans le cadre de ce cours.

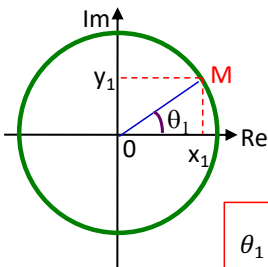
Avec la notation complexe il est possible (comme pour les vecteurs "traditionnels") de calculer le module du vecteur résultant (via le théorème de Pythagore) et l'angle qu'il forme avec l'axe des X.

- Dans le premier cas, il s'agit simplement du calcul de l'hypoténuse d'un triangle rectangle
- Dans le second cas, le rapport de la projection avec l'hypoténuse donne soit la valeur du *sinus* de l'angle (projection sur l'axe Y/Hypoténuse), soit la valeur du *cosinus* de l'angle (projection sur l'axe des X/Hypoténuse).

La valeur de l'angle s'obtient en calculant l'**arctg** du rapport des deux projections. Celle sur Y s'appelle **Im** comme valeur sur le plan imaginaire et celle sur X s'appelle **Re**, comme valeur sur le plan Réel.

## Calcul de l'argument: 4 cas sont analysés

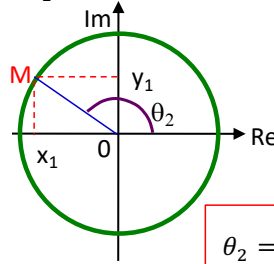
1) Si  $\theta_1$  se situe dans le premier quadrant



$$\begin{aligned} \text{Im} &> 0 \\ \text{Re} &> 0 \end{aligned}$$

$$\theta_1 = \text{arctg} \left( \frac{\text{Im}}{\text{Re}} \right)$$

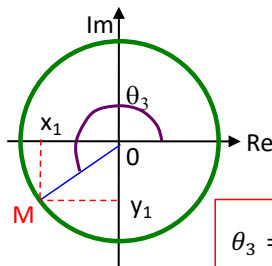
2) Si  $\theta_2$  se situe dans le second quadrant



$$\begin{aligned} \text{Im} &> 0 \\ \text{Re} &< 0 \end{aligned}$$

$$\theta_2 = \pi + \text{arctg} \left( \frac{\text{Im}}{\text{Re}} \right) = \pi - \text{arctg} \left( \left| \frac{\text{Im}}{\text{Re}} \right| \right)$$

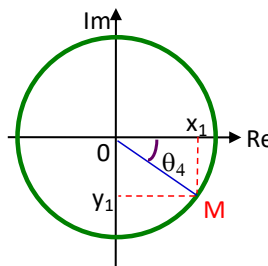
3) Si  $\theta_3$  se situe dans le troisième quadrant



$$\begin{aligned} \text{Im} &< 0 \\ \text{Re} &< 0 \end{aligned}$$

$$\theta_3 = \pi + \text{arctg} \left( \frac{\text{Im}}{\text{Re}} \right)$$

4) Si  $\theta_4$  se situe dans le quatrième quadrant



$$\begin{aligned} \text{Im} &< 0 \\ \text{Re} &> 0 \end{aligned}$$

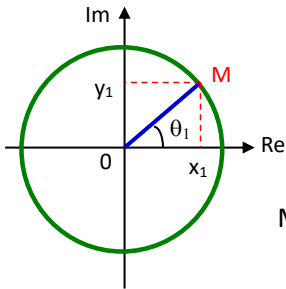
$$\theta_4 = \text{arctg} \left( \frac{\text{Im}}{\text{Re}} \right) = -\text{arctg} \left| \frac{\text{Im}}{\text{Re}} \right|$$

14

Le calcul de cet angle peut s'avérer délicat, compte tenu du fait que dans le cercle trigonométrique, il existe 4 quadrants. L'expression de l'angle diffère selon le quadrant sollicité.

Chaque expression fait référence au rapport  $\text{Im}/\text{Re}$  et produira un résultat différent selon que  $\text{Im}$  est positif ou négatif, même chose pour  $\text{Re}$ .

## Autres propriétés des nombres complexes [1]



$$M = x_1 + j.y_1$$

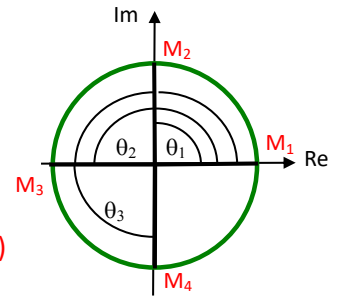
ou

$$M = \rho.\cos(\theta_1) + j. \rho.\sin(\theta_1)$$

Considérons les trois déphasages  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ , ci-contre

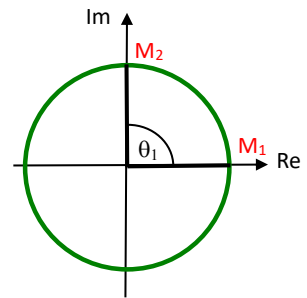
$$M_1 = \rho.\cos(0) + j. \rho.\sin(0)$$

ou  $M_1 = \rho.\cos(0) = \rho$



- 1) Passer de  $M_1$  à  $M_2$ :  $M_2 = \rho.\cos(\pi/2) + j.\rho.\sin(\pi/2)$   
 $M_2 = j.\rho.\sin(\pi/2)$ , soit  $M_2 = j.\rho$  ou encore  $M_2 = j.M_1$

**Conséquence 1:** Ajouter un déphasage de  $\pi/2$  à un nombre  $M$  revient à "multiplier  $M$  par  $j$ "



15

L'analyse de l'évolution du point  $M$  sur le cercle trigonométrique va nous permettre de démontrer quelques propriétés sur les nombres complexes.

Soit un point  $M$  sur le cercle trigonométrique. Il s'exprime sous la forme d'une somme "vectorielle", un *cosinus* pour le plan Réel et un *sinus* pour le plan Imaginaire. Le vecteur sur la plan imaginaire est identifié grâce au symbole " $j$ ".

Nous allons vérifier certaines propriétés en exécutant 4 déphasages de  $0$  à  $\pi/2$ , de  $\pi/2$  à  $\pi$ , de  $\pi$  à  $3\pi/2$  et de  $3\pi/2$  à  $2\pi$ .

Le premier déphasage nous amène de la position  $M_1$  en  $M_2$ .

On constate dans l'expression  $jM\sin(\pi/2)$ , qu'un déphasage de  $\pi/2$  revient à multiplier l'expression de  $M$  par " $j$ ".

## Autres propriétés des nombres complexes [2]

2) Passer de  $M_1$  à  $M_3$ :

$$M_3 = \rho \cdot \cos(\pi) + j \cdot \rho \cdot \sin(\pi),$$

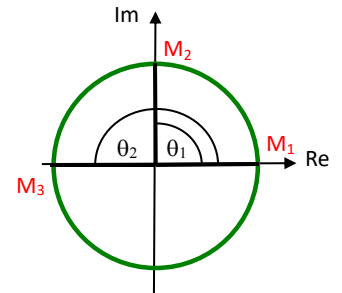
$$M_3 = \rho \cdot \cos(\pi) = -\rho = -M_1, \text{ soit } M_3 = -M_1$$

conséquence 2.a: ajouter un déphasage de  $\pi$  à un nombre  $M$  revient à "multiplier  $M$  par  $-1$ "

$$\text{Pour passer de } M_2 \text{ à } M_3 \text{ on a aussi: } M_3 = j \cdot M_2 = j^2 \cdot M_1$$

conséquence 2.b:

$$j^2 = -1$$



3) Passer de  $M_1$  à  $M_4$ :

$$M_4 = \rho \cdot \cos(3\pi/2) + j \cdot \rho \cdot \sin(3\pi/2),$$

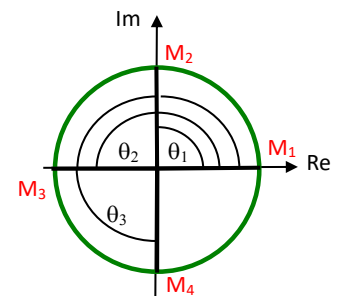
$$M_4 = j \cdot \rho \cdot \sin(3\pi/2) = -j \cdot \rho = -j \cdot M_1, \text{ soit } M_4 = -j \cdot M_1$$

conséquence 3.a: ajouter un déphasage de  $3\pi/2$  à un nombre  $M$  revient à "multiplier  $M$  par  $-j$ "

$$\text{Pour passer de } M_3 \text{ à } M_4 \text{ on a aussi: } M_4 = j \cdot M_3 = j^2 \cdot M_2 = j^3 \cdot M_1$$

conséquence 3.b:

$$j^3 = -j$$



conséquence 4:

$$-j = -j \cdot j / j = 1/j \text{ et } j^4 = j^3 \cdot j = -j \cdot j = -(-1) = 1$$

16

Lorsque  $M$  passe de la position  $M_1$  à  $M_3$ , soit un déphasage de  $\pi$ , on constate que  $M_3 = -M_1$

D'autre part, un déphasage de  $\pi$  représente deux déphasages de  $\pi/2$ . Chaque déphasage de  $\pi/2$  impliquait une multiplication par  $j$ .

Un déphasage de  $\pi$  implique donc qu'on multiplie par  $j^2$ . On en déduit que  $j^2 M_1 = -M_1$  ou encore que  $j^2 = -1$ .

Pour passer de  $M_1$  à  $M_4$ , il faut réaliser un déphasage supplémentaire de  $\pi/2$ , soit au total  $3\pi/2$ . Un nouveau déphasage implique que l'on multiplie  $M_1$  par  $j^3$  ( $j$  pour chaque déphasage de  $\pi/2$ ).

On en déduit aussi que  $j^3 = j^2 \cdot j = -j$

Sans démonstration, il est possible de déduire que  $j^4 = j^3 \cdot j = -j \cdot j = 1$  (on retombe sur nos pattes).

## Notion d'impédance complexe

Avec R nous avons vu que:

$$u_S(t) = R \cdot I_0 \cdot \sin(\omega t) = U_0 \cdot \sin(\omega t)$$

$$i(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t)$$

Avec C nous avons vu que:

$$u_S(t) = \frac{I_0}{\omega C} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Idéalement: il faudrait avoir la forme  $K \cdot \sin \omega t$  pour travailler avec R et C **sans se préoccuper du déphasage**.

**Question:** Comment transformer  $M_1 = K_1 \cdot \sin(\omega t - \pi/2)$  en  $K_2 \cdot \sin(\omega t)$ ????

**Solution:**  $K_1 \cdot \sin(\omega t - \pi/2) = K_2 \cdot \sin(\omega t)$

Nous avons vu qu'il fallait multiplier par  $j^3 = -j$ , donc  $M_1 = K_1 \cdot \sin(\omega t - \pi/2) = -j \cdot K_1 \cdot \sin(\omega t)$

**Application avec C:**  $u_S(t) = \frac{I_0}{\omega C} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \underbrace{-j}_{\text{red circle}} \frac{I_0}{\omega C} \cdot \sin(\omega t) = \underbrace{j}_{\text{red circle}} \frac{I_0}{\omega C} \cdot \sin(\omega t)$

Comparons R, C et L pour  $i(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t)$

- avec R:  $u_S(t) = R \cdot i(t)$
- avec C:  $u_S(t) = R_C \cdot i(t) = \underline{Z}_C \cdot i(t) \rightarrow \underline{u}_s = \underline{Z}_C \cdot \underline{i}$  où  $\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$  (Impédance complexe)
- avec L:  $u_S(t) = R_L \cdot i(t) = \underline{Z}_L \cdot i(t) \rightarrow \underline{u}_s = \underline{Z}_L \cdot \underline{i}$  où  $\underline{Z}_L = j\omega L$  (Impédance complexe)

*Écriture impropre*

17

Ces différentes explications nous amènent à développer la notion d'impédance complexe qui nous permettra par la suite d'assimiler le condensateur à une "résistance variable".

Nous partons du principe que le condensateur présente un déphasage de  $\pi/2$  entre la tension à ses bornes et le courant qui le traverse.

Un tel déphasage (vu précédemment) est représenté par le facteur  $j$ .

Dans ce cas  $u(t) = -j/\omega C \cdot I_0 \sin \omega t$  ou encore  $u(t) = I_0 \sin \omega t \cdot 1/j\omega C$

Que constate-t-on ? En faisant l'analogie avec une résistance où  $U = RI$ , nous pouvons considérer que  $1/j\omega C$  se comporte comme une résistance (variable avec la fréquence)

## Petite parenthèse calcul module et argument

Coordonnées polaires adaptées pour calcul de produit et de rapport

$$M_1 = \rho_1 e^{j\theta_1} \quad M_2 = \rho_2 e^{j\theta_2}$$

Produit de deux expressions complexes

$$M_1 \cdot M_2 = \rho_1 e^{j\theta_1} \cdot \rho_2 e^{j\theta_2} = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

Rapport de deux expressions complexes

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\rho_1 e^{j\theta_1}}{\rho_2 e^{j\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

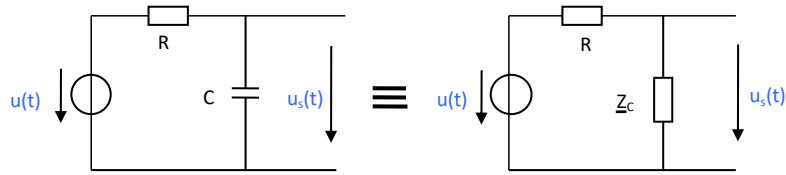
18

Cette parenthèse a pour objectif de montrer comment se calculent des produits et des rapports de nombres complexes

Dans le cas d'un **produit** : Le module est égal au produit des modules, et l'argument est égal à la somme des arguments

Dans le cas d'un **rapport** : Le module est égal au rapport des modules, et l'argument est égal à la différence des arguments

## Application aux circuits



Calcul de  $\frac{u_s(t)}{u(t)}$  ou plutôt de  $\frac{\underline{u}_s}{\underline{u}}$   $\frac{\underline{u}_s}{\underline{u}} = \frac{\underline{Z}_c}{R + \underline{Z}_c} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \underline{H}(j\omega)$

*Ne pas laisser sous cette forme*

Ce rapport est appelé **FONCTION DE TRANSFERT**.

C'est une expression complexe dont on peut calculer le module  $|\underline{H}(j\omega)|$  et l'argument  $\text{Arg}(\underline{H}(j\omega))$

Module d'un produit = Produit des modules

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

Module d'un rapport = Rapport des modules

Argument d'un produit = Somme des arguments

$$\text{Arg}(\underline{H}(j\omega)) = -\text{arctg}(\omega RC)$$

Argument d'un rapport = différence des arguments

19

A partir du moment où nous pouvons représenter aussi simplement un condensateur, il sera possible d'analyser des circuits combinant R et C comme lors des cours précédents.

Le circuit proposé ici s'exprime comme un diviseur résistif. Son expression est cependant plus complexe car elle dépend de  $\omega$ . On appelle cette expression la fonction de transfert.

Cette fonction de transfert nous permettra d'évaluer deux informations importantes. Comme toute expression complexe, nous pouvons déduire le module et l'argument.

Le module permet de comparer en fonction de  $\omega$  les amplitudes du signal de sortie et du signal d'entrée.

L'argument permet de comparer en fonction de  $\omega$  le déphasage entre le signal de sortie et le signal d'entrée.

## Filtre passe-bas

La fonction de transfert calculée précédemment correspond à un **filtre passe-bas**

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Observations du **module**

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

- si  $\omega \rightarrow 0$  alors  $|\underline{H}(j\omega)| \rightarrow 1$  (pas d'atténuation)
- si  $\omega \rightarrow \infty$  alors  $|\underline{H}(j\omega)| \rightarrow 0$  (Atténuation complète)

Observations de **l'argument**

$$\text{Arg}(\underline{H}(j\omega)) = -\text{arctg}(\omega RC)$$

- si  $\omega \rightarrow 0$  alors  $\text{Arg}(\underline{H}(j\omega)) = -\text{arctg}(\omega RC) = 0$
- si  $\omega \rightarrow \infty$  alors  $\text{Arg}(\underline{H}(j\omega)) = -\text{arctg}(\omega RC) = -\pi/2$

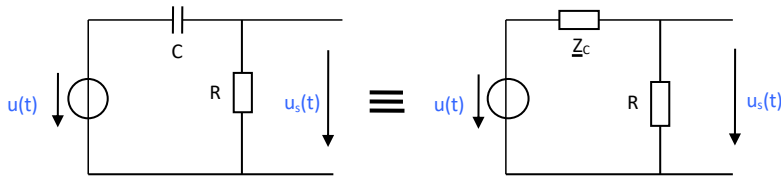
20

Sans rentrer dans les détails, il est possible de voir que les deux expressions dépendent de  $\omega$ . Pour mettre en évidence la nature du circuit il faut analyser sa fonction de transfert pour les basses fréquences (on assimile  $\omega$  à 0) et en hautes fréquences (on assimile  $\omega$  à  $\infty$ ).

On constate que le comportement est celui d'un filtre passe-bas (atténuation des hautes fréquences, les basses fréquences passent) que nous exploiterons dans les séances futures.

L'autre conséquence, moins triviale, est relative au déphasage qui est maximal à haute fréquence et vaut  $-\pi/2$ , alors qu'à basse fréquence le déphasage est nul

## Filtre passe-haut



R et C sont permutées

Calcul de  $\underline{H}(j\omega) = \underline{u}_s/\underline{u}$

La fonction de transfert est celle d'un filtre passe-haut

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

$$\frac{\underline{u}_s}{\underline{u}} = \frac{R}{R + \underline{Z}_c} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \underline{H}(j\omega)$$

Observations du **module**

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

- si  $\omega \rightarrow 0$  alors  $|\underline{H}(j\omega)| \rightarrow 0$  (Atténuation complète)
- si  $\omega \rightarrow \infty$  alors  $|\underline{H}(j\omega)| \rightarrow 1$  (pas d'atténuation)

Observations de **l'argument**

$$\text{Arg}(\underline{H}(j\omega)) = \frac{\pi}{2} - \text{arctg}(\omega RC)$$

- si  $\omega \rightarrow 0$  alors  $\text{Arg}(\underline{H}(j\omega)) = \pi/2$
- si  $\omega \rightarrow \infty$  alors  $\text{Arg}(\underline{H}(j\omega)) = \pi/2 - \pi/2 = 0$

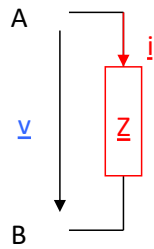
21

Lorsque l'on permute R et C, on obtient une nouvelle fonction de transfert. Étudiée aux limites comme précédemment ( $\omega$  assimilée à 0 et  $\omega$  assimilée à  $\infty$ ), cette fonction de transfert révèle qu'il s'agit d'une filtre passe-haut. On constate en effet qu'à basse fréquence la sortie ne reproduit quasiment plus rien, alors qu'à haute fréquence la sortie reproduit tout le signal d'entrée. Dans ce type de montage nous observons encore un déphasage qui est maximal à basse fréquence et vaut  $\pi/2$ , alors qu'à haute fréquence le déphasage est nul

# Les composants de base

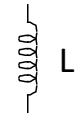
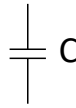
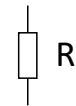
## Application aux signaux sinusoïdaux

Composant passif quelconque



$$\underline{v} = f_1(\underline{i})$$

$$\underline{i} = f_2(\underline{v})$$



Composants R, L, C

	$\underline{v}$	$\underline{i}$
R	$R \cdot \underline{i}$	$\frac{\underline{v}}{R}$
C	$\frac{1}{j\omega C} \underline{i}$	$\underline{v} j\omega C$
L	$j\omega L \underline{i}$	$\frac{1}{j\omega L} \underline{v}$

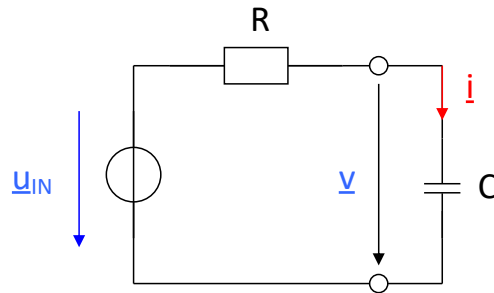
En guise d'illustration, nous proposons quelques circuits simples combinant R, C et L

Ces circuits exploitent l'écriture complexe (impédance) de chaque composant, ce qui permettra de déduire la fonction de transfert du montage.

Le tableau résume l'expression des impédances (pour exprimer la tension en fonction du courant) et des admittances (pour le contraire).

## Cas particulier

### Circuit RC et signaux sinusoïdaux



Même démarche (Kirchhoff) que dans la dia 4

$$\underline{i} = \frac{u_{IN} - v}{R} = v \cdot j\omega C \Rightarrow \frac{u_{IN}}{R} = \frac{v}{R} + v \cdot j\omega C = v \left( \frac{1 + j\omega RC}{R} \right) \Rightarrow v = u_{IN} \cdot \frac{1}{1 + j\omega RC}$$



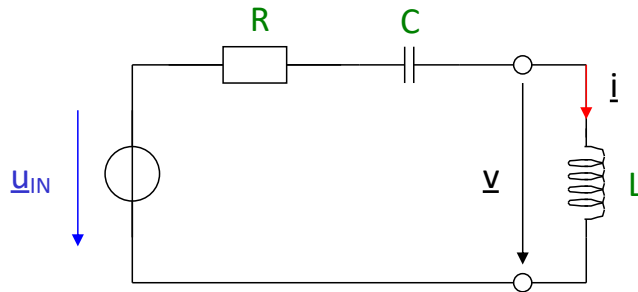
*Se référer au cours sur les diagrammes de Bode pour l'analyse*

23

Nous avons déjà exprimé sous forme temporelle (avec une **équation différentielle du premier ordre**) le comportement de ce montage. L'expression complexe est bien plus simple à exploiter comme nous le verrons lors du cours prochain sur les diagrammes de Bode.

## Cas particulier

Circuit RLC et signaux sinusoïdaux



$$\underline{u}_{IN} = R\underline{i} + \frac{\underline{i}}{j\omega C} + j\omega L\underline{i}$$

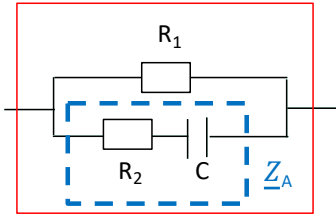
$$\underline{v} = \underline{u}_{IN} \cdot \frac{j\omega L}{R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L} = \underline{u}_{IN} \cdot \frac{(j\omega)^2 LC}{1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC}$$

24

Le comportement de ce montage a déjà été exprimé il y a deux semaines sous la forme d'une **équation différentielle du second ordre**.

L'expression complexe est aussi du second ordre, mais bien plus simple à exploiter.

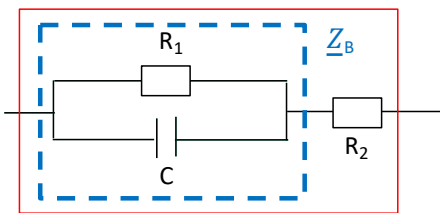
## Exemples d'application: Calcul d'impédances équivalentes



$\underline{Z}_{EQ1}$

$$\underline{Z}_A = R_2 + Z_C = R_2 + \frac{1}{j\omega C} = \frac{1 + j\omega R_2 C}{j\omega C}$$

$$\underline{Z}_{EQ1} = \frac{R_1 \cdot \underline{Z}_A}{R_1 + \underline{Z}_A} = \frac{R_1 \cdot \frac{1 + j\omega R_2 C}{j\omega C}}{R_1 + \frac{1 + j\omega R_2 C}{j\omega C}} = \frac{R_1 \cdot (1 + j\omega R_2 C)}{j\omega C R_1 + 1 + j\omega R_2 C} = \frac{R_1 \cdot (1 + j\omega R_2 C)}{1 + j\omega C(R_1 + R_2)}$$



$\underline{Z}_{EQ2}$

$$\underline{Z}_B = \frac{R_1 \cdot \underline{Z}_C}{R_1 + \underline{Z}_C} = \frac{R_1 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C}$$

$$\underline{Z}_{EQ2} = \underline{Z}_B + R_2 = \frac{R_1}{j\omega R_1 C + 1} + R = \frac{R_1}{j\omega R_1 C + 1} + \frac{R_2(1 + j\omega R_1 C)}{1 + j\omega R_1 C}$$

$$\underline{Z}_{EQ2} = \frac{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C}{1 + j\omega R_1 C} = (R_1 + R_2) \cdot \frac{1 + j\omega \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C}{1 + j\omega R_1 C}$$